Lycée M^{ed} Reda Slaoui
Centre Des Classes Préparatoires
Agadir

Année Scolaire : 04/05
BCPST 1

Correction de Devoir surveillé $n°4$

Exercice 1

1. Nous avons,

$$\sin(x) = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}) \quad \text{et} \quad (\tan(\frac{x}{2}))' = \frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{x}{2}))$$

d'où :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin(x)}dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{2}(1+\tan^2(\frac{x}{2}))}{\tan(\frac{x}{2})} \\ &= [\ln(\tan\frac{x}{2}]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = -\ln(\tan(\frac{\pi}{8}) \end{aligned}$$

2. Par intégrons par parties, on a :

$$\begin{aligned} J &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln(\sin x) dx \\ &= [-\cos(x)\ln(\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}dx \\ &= \cos\frac{\pi}{4}\ln(\sin\frac{\pi}{4}) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin(x)} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + I + [\cos(x)]\frac{\pi}{4}^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

d'où :

$$J = -\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2 - \ln(\tan\frac{\pi}{8}) - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercice 2

1. a) Soit F une primitive de la fonction f telle que $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$, alors :

$$G(x) = F(2x) - F(x)$$

d'où

$$G'(x) = 2F'(x) - F'(x)$$

donc

$$G'(x) = \frac{2}{\sqrt{(2x)^4 + (2x)^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}$$

b) On a $G(x) = F(2x) - F(x)$ et $G(0) = 0$

Un développement limité à l'ordre 5 de G au voisinage de 0 est obtenu à partir d'un développement limité d'ordre 4 de la fonction G', au voisinage de 0. Nous avons :

$$(1+y)^{\frac{-1}{2}} = 1 - \frac{y}{2} + \frac{3}{8}y^2 + o(y^2)$$

pour $y = x^2 + x^4$ ou $y = (2x)^2 + (2x)^4$, on obtient :

$$G'(x) = 1 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{31}{8}x^4 + o(x^4)$$

donc

$$G(x) = x - \frac{7}{6}x^3 - \frac{31}{40}x^5 + o(x^5)$$

2. a) Pour tout $t \neq 0$ on a :

$$t^4 < t^4 + t^2 + 1 < t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2+1)^2$$

Donc

$$\frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}} < \frac{1}{t^2}$$

b) Si $x > 0$, alors $2x > x$, donc on peut écrire :

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2+1} < \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}} < \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$$

par suite

$$\arctan 2x - \arctan x < G(x) < \frac{1}{2x}$$

Pour $x < 0$ on a : $2x < x$, donc :

$$\frac{1}{2x} < G(x) < \arctan 2x - \arctan x$$

3. Soit $H(y) = \int_0^y (\arctan 2x - \arctan x)dx$

a) On a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} H(y) &= \int_0^y (\arctan 2x - \arctan x)dx \\ &= \int_0^y \arctan 2x dx - \int_0^y \arctan x dx \\ &= [x \arctan 2x]_0^y - \int_0^y \frac{2x dx}{1+4x^2} - [x \arctan x]_0^y - \int_0^y \frac{x dx}{1+x^2} \\ &= y[\arctan 2y - \arctan y] - \frac{1}{4}\ln(1+4y^2) + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) \end{aligned}$$

b) On a :

$$\frac{H(y)}{y} = [\arctan 2y - \arctan y] - \frac{1}{4y}\ln(1+4y^2) + \frac{1}{2y}\ln(1+y^2)$$

Il est clair que

$$\lim_{y\longrightarrow+\infty}\frac{H(y)}{y}=0$$

D'après 2)b) pour tout $y>0$, on a :

$$\frac{H(y)}{y}\leq\frac{1}{y}\int_0^y G(x)dx$$

et

$$\frac{1}{y}\int_\varepsilon^y G(x)dx\leq\frac{1}{2y}\int_\varepsilon^y\frac{dx}{x},\quad \text{pour tout}\quad \varepsilon>0$$

(car $\int_0^y \frac{dx}{x}$ n'est pas définie)

On sait que $\lim\limits_{y\longrightarrow+\infty}\frac{H(y)}{y}=0$, calculons $\lim\limits_{y\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2y}\int_\varepsilon^y\frac{dx}{x}$

On a :

$$\frac{1}{2y}\int_\varepsilon^y\frac{dx}{x}=\frac{1}{2y}[\ln y-\ln\varepsilon]$$

donc $\lim\limits_{y\longrightarrow+\infty}\frac{1}{2y}\int_\varepsilon^y\frac{dx}{x}=0$, pour tout $\varepsilon>0$, par conséquent $\lim\limits_{y\longrightarrow\infty}\frac{1}{y}\int_0^y G(x)dx=0$

Exercice 3

Nous considérons la suite (I_n) définie pour $n\geq 1$ par $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n(x)dx$

1. La fonction $x\longrightarrow\tan^n x$ est continue sur l'intervalle $[0,\frac{\pi}{4}]$, pour tout $n\geq 1$, donc I_n existe et bien définie.

   On a :

   $$0\leq x\leq\frac{\pi}{4}\Longrightarrow 0\leq\tan x\leq 1$$

   donc $0\leq tan^{n+1}x\leq tan^n x$ et par conséquent

   $$0\leq I_{n+1}\leq I_n$$

   donc la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ est décroissante minorée par 0.

2. a) Pour tout $n\geq 1$, on a :

   $$\begin{aligned} I_n+I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\tan^2 x)\tan^n x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)'\tan^n x dx \\ &= \frac{1}{n+}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^{n+1}x)'dx=\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

   b) On trouve $I_1=\ln\sqrt{2}$ et $I_2=1-\frac{\pi}{4}$ et en utilisant la relation de récurrence on a :
   $I_3=\frac{1}{2}-I_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 2$ et $I_4=\frac{1}{3}-I_2=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$
   c) On a :

   $$I_n\leq I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}$$

   donc $I_n\leq\frac{1}{n+1}$
   D'autre part :

   $$\frac{1}{n+1}=I_n+I_{n+2}\leq I_n+I_n=2I_n$$

d'où $\frac{1}{2(1+n)} \leq I_n$
Donc
$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{et par suite} \quad \lim_{n \longrightarrow \infty} I_n = 0$$

Exercice 4

1. $u_1 = e - 2$.
2. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^t dt \\ &= \frac{1}{(n+1)!} ([(1-t)^{n+1} e^t]_0^1 + (n+1) \int_0^1 (1-t)^n e^t dt) \\ &= \frac{-1}{(n+1)!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^t dt \\ &= u_n - \frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

En ajoutant membre à membre les $n-1$ premières égalités on obtient :

$$u_n = u_1 - \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \right) = e - 2 - \left(\sum_{p=2}^{p=n} \frac{1}{p!} \right) = e - 1 - \left(\sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{p!} \right)$$

.

3. Comme $1 - t \geq 0$ alors $u_n \geq 0$
d'autre part $u_n \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^t dt$ car $(1-t)^n e^t \leq e^t$
Donc
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{e}{n!}$$
D'après 2) on a :
$$u_n = e - \left(\sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!} \right)$$
D'où
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sum_{p=0}^{p=n} \frac{1}{p!} \right) = e - \lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = e - 0 = e$$

••••••••••